ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I3 1982

Л.Г.Корсакова

О КОНГРУЭНЦИИ ПАР КОНИК, ИНЦИДЕНТНЫХ ОДНОМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ КВАДРИК

В трехмерном проективном пространстве рассматривается невырожденная конгруэнция K пар коник C_1, C_2, не лежащих в одной плоскости и имеющих две общие точки A_1 и A_2, причем коники принадлежат квадрике Q, описывающей одномерное многообразие. Плоскости коник образуют двупараметрические семейства. Исследованы 2 частных класса конгруэнций K.

Отнесем конгруэнцию K к реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершины A_3 и A_4 помещены в полюсы прямой A_1A_2 соответственно относительно коник C_1 и C_2. При надлежащей нормировке вершин репера R уравнения коник C_1, C_2 и квадрики Q будут иметь вид:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0;$$
$$(x^4)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0;$$
$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2cx^3x^4=0,\quad dc=0.$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции K приводится к виду:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_1^3,\quad \omega_3^2-\omega_1^3-c\omega_1=\alpha\omega_1^3,\quad \omega_3^1-\omega_2^3-c\omega_2=\beta\omega_1^3,$$
$$\omega_4^2-c\omega_1^3-\omega_1=\gamma\omega_1^3,\quad \omega_4^1-c\omega_2^3-\omega_2=\lambda\omega_1^3,$$
$$\Omega_1-2c\omega_3^4=\mu\omega_1^3,\quad \Omega_2-2c\omega_4^3=\eta\omega_1^3,$$
$$2c(\omega_1^1+\omega_2^2)-\omega_3^4-\omega_4^3=\xi\omega_1^3,\qquad (1)$$
$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k.$$

Здесь ω_a^b $(a,b=1,2,3,4)$ – компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, $\omega_i\overset{def}{=}\omega_i^4$,

$$\Omega_i\overset{def}{=}\omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2};\quad i,j,k=1,2;\quad i\neq j \quad \text{и}$$

по индексам i,j суммирование не производится.

Из анализа системы (1) следует, что конгруэнции K существуют и определяются с произволом 3-х функций 2-х аргументов.

Фокальное многообразие [1] ранга 1 квадрики Q определяется системой уравнений

$$\mathcal{F}=0,\quad \mathcal{F}_1=0,$$

где

$$\mathcal{F}_1\equiv\mu(x^3)^2+\eta(x^4)^2+2\xi x^3x^4+2\alpha x^3x^1+2\beta x^2x^3+$$
$$+2\gamma x^4x^1+2\lambda x^2x^4+2\Gamma_1^2(x^1)^2+2\Gamma_2^1(x^2)^2.$$

Определение. Конгруэнцией K_1 называется такая конгруэнция K, ассоциированная инвариантная квадрика $\mathcal{F}_1$ которой представляет собой сдвоенную плоскость $x^2=0$.

Конгруэнция K_1 определяется системой пфаффовых уравнений

$$\omega_1^2=0,\quad \omega_2^1=\Gamma_2^1\omega_1^3,\quad \omega_3^2=\omega_1^3+c\omega_1,\quad \omega_3^1=\omega_2^3+c\omega_2,$$
$$\omega_4^2=c\omega_1^3+\omega_1,\quad \omega_4^1=c\omega_2^3+\omega_2,\ \Omega_1=2c\omega_3^4,\ \Omega_2=2c\omega_4^3,$$
$$\omega_3^4+\omega_4^3=0,\quad \omega_1^3=\Gamma_1^{31}\omega_1,\quad \omega_2^3=\Gamma_2^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k.\qquad (2)$$

и их замыканиями и существует с произволом двух функций двух аргументов.

Конгруэнции K_1 обладают следующими геометрическими свойствами: I/ множество точек (A_1) является линией; 2/ конгруэнции (A_1A_3) и (A_1A_4) – параболические со сдвоенным фокусом в точке A_1; 3/ многообразие плоскостей $(A_1A_3A_4)$ – однопараметрическое; 4/ если точка A_3 является характеристической точкой плоскости $(A_1A_2A_3)$, то поверхность (A_4) будет огибающей для семейства плоскостей $(A_1A_2A_4)$; 5/ точка A_1 является пятикратным фокусом коник C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2); 6/ фокальное многообразие квадрики Q представляет из себя пару сдвоенных прямых.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K_0 называется конгруэнция K_1 для которой: 1/ точка A_3 является характеристической точкой плоскости $(A_1A_2A_3)$; 2/ линии, огибаемые прямыми A_3A_i на поверхности (A_3), являются асимптотическими линиями.

Система пфаффовых уравнений конгруэнции K_0 приводится к виду:

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^1=\Gamma_2^1\omega_1^3,\ \ \omega_3^i=(\gamma+c)\omega_j,\ \omega_4^i=(\gamma c+1)\omega_j,$$
$$\omega_1^1+\omega_2^2=0,\ \ \omega_3^3=\omega_4^4=0,\ \ \omega_i^3=\gamma\omega_i \qquad (3)$$
$$\omega_3^4=\omega_4^3=0,\ \ d\gamma=0,$$

из анализа которой следует произвол существования конгруэнции K_0 – одна функция одного аргумента.

Конгруэнции K_0 обладают следующими свойствами: 1/ поверхность (A_2) является плоскостью; 2/ конгруэнции (A_2A_3), (A_2A_4) являются параболическими; 3/ прямые A_1A_3, A_1A_4 описывают линейчатые поверхности; 4/ характеристическая точка плоскости $(A_2A_3A_4)$ инцидентна прямой A_3A_4; 5/ прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) является связкой.

Для характеристических поверхностей (A_3) и (A_4) найдены трехпараметрические семейства соприкасающихся квадрик соответственно в виде:

$$a_{44}(x^4)^2+2x^1x^2+2a_{14}x^1x^4+2a_{24}x^2x^4-(\gamma+c)x^3x^4=0,$$
$$a_{33}(x^3)^2+2x^1x^2+2a_{13}x^1x^3+2a_{23}x^2x^3-2\frac{c\gamma+1}{\gamma}x^3x^4=0$$

и квадрики Ли

$$(\gamma^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2-2(\gamma+c)x^3x^4=0,$$
$$(1-\gamma^2)(x^3)^2+2\gamma^2x^1x^2-2(c\gamma+1)x^3x^4=0,$$

причем квадрики Ли обеих поверхностей (A_3) и (A_4) описывают однопараметрические семейства.

Получено уравнение соприкасающегося линейного комплекса асимптотической линии $\omega_2=0$ поверхности (A_3) в виде

$$p_{12}-(\gamma+c)\,p_{43}=0.$$

Список литературы

1. М а х о р к и н В.В. Однопараметрические семейства квадрик в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.61-63.